

Suites infinies de surfaces de Riemann parfaites

Alexandre Casamayou-Boucau

*Université de Fribourg, Département de Mathématiques, Chemin du Musée, 23,
1700 Fribourg, Switzerland*

Reçu le 7 mars 2004 ; accepté le 13 mars 2004

Disponible sur Internet le 18 mai 2004

Résumé

Dans cet article, on construit deux nouvelles suites infinies de surfaces de Riemann parfaites en genre quelconque supérieur à six. La première est une suite de surfaces parfaites et faiblement eutactiques ; la deuxième est une suite de surfaces parfaites et semi-eutactiques.

Abstract

In this article we give two new infinite sequences of perfect non-extremal Riemann surfaces of genus bigger than six. The first sequence consists of weakly eutactic perfect surfaces; the second one of semi-eutactic perfect surfaces.

MSC: 51M10

Keywords: Riemann surfaces; Systole; Perfect non-extremal surfaces

1. Introduction

La systole d'une surface de Riemann compacte, marquée, de genre g est définie comme étant le minimum des fonctions longueur géodésique sur l'espace de Teichmüller, fonctions qui sont paramétrées par l'ensemble C_g des classes d'homotopie libre de courbes fermées de Σ_g , où l'on exclut les courbes triviales. La *fonction systole* a récemment été étudiée par P. Schmutz Schaller (cf. [14–17]) et par Ch. Bavard (cf. [1]).

Adresse e-mail : alexandre.casamayou@m4x.org (A. Casamayou-Boucau).

Soit T_g l'espace de Teichmüller des surfaces de Riemann compactes, marquées, de genre g ; c'est aussi l'espace des métriques hyperboliques complètes à isotopie près sur une surface orientée X de signature $(g, 0)$. On rappelle que $\dim_{\mathbb{R}} T_g = 6(g - 1)$. L'espace de Teichmüller sera muni de la métrique de Weil–Petersson. Le groupe modulaire de Teichmüller Mod_g agit sur T_g par isométries de Weil–Petersson. Dans la suite, on note $S(X)$ l'ensemble des éléments de C_g tels que $l_c(X) = \text{Systole}(X)$ (“courbes de longueurs minimales, ou systoles”), où l_c désigne la longueur de la géodésique associée à c dans X .

Nous appellerons *surface de Riemann extrême* un maximum local de la systole. Une première caractérisation des surfaces extrêmes a été établie par P. Schmutz Schaller dans [14]. Nous utiliserons ici plutôt la caractérisation donnée par Ch. Bavard dans [1] qui possède l'intérêt de faire apparaître l'analogie avec la théorie des réseaux.

Nous pouvons également définir, conformément à [1], les notions de *surface de Riemann parfaite* et de *surface de Riemann eutactique* (resp. *semi-eutactique* et *faiblement eutactique*) de la manière suivante. Soit $X \in T_g$; la surface X est dite *parfaite* si les gradients (pour la métrique de Weil–Petersson) $(\nabla l_c(X))_{c \in S(X)}$ engendrent affinement l'espace tangent $T_X(T_g)$; la surface X est dite *eutactique*, (resp. *semi-eutactique*, resp. *faiblement eutactique*) si le vecteur nul de $T_X(T_g)$ appartient à l'intérieur affine de l'enveloppe convexe des gradients $(\nabla l_c(X))_{c \in S(X)}$ (resp. appartient à l'enveloppe convexe des gradients $(\nabla l_c(X))_{c \in S(X)}$, resp. appartient au sous-espace affine engendré par les gradients $(\nabla l_c(X))_{c \in S(X)}$). On remarque qu'une surface parfaite contient au moins $\dim_{\mathbb{R}} T_g + 1 = 6g - 5$ systoles. Ch. Bavard a alors énoncé le résultat suivant, qui est le strict analogue du théorème de Voronoï pour les réseaux : *Une surface de Riemann est extrême si et seulement si elle est parfaite et eutactique* [1]. Par ailleurs, on sait que les surfaces de Riemann parfaites sont en nombre fini modulo l'action du groupe Mod_g , et que leur systole est le logarithme d'un nombre algébrique [4].

Il est intéressant de classifier les surfaces parfaites pour deux raisons : d'une part, cette classification intervient dans la recherche du maximum global de la systole sur T_g (qui existe d'après [13]); d'autre part, classifier les surfaces parfaites permet de mieux comprendre le lien qu'il y a entre les surfaces extrêmes pour la systole [2,10,11,14–16] et les jacobiniennes extrêmes pour l'invariant d'Hermite (Pour la classification des réseaux parfaits, on pourra se reporter à [3–5]). En outre la recherche de suites infinies de surfaces parfaites permet d'obtenir des renseignements sur le comportement asymptotique de la systole en grand genre [7].

Actuellement, on ne connaît que peu d'exemples de suites infinies de surfaces parfaites : une suite de surfaces extrêmes $A(n)$ [14] et deux suites infinies de surfaces parfaites non extrêmes B_g [9] et $M_{G(n)}$ [17]. Dans cet article, on s'intéresse à une famille de surfaces de Riemann compactes de genre $g \geq 5$, invariantes par le groupe diédral D_g d'ordre $2g$. Pour chaque $g \geq 6$, on trouve une surface parfaite et faiblement eutactique \aleph_g et une surface parfaite et semi-eutactique \beth_g .

2. Etude d'une famille de surfaces invariantes par le groupe dihédral D_g

2.1. Présentation de la famille

Soit un entier naturel $g \geq 5$. On s'intéresse à la famille associée au graphe suivant : on considère $g - 1$ sommets formant un polygone régulier à $g - 2$ côtés ; on considère le polygone dilaté du précédent et on joint les sommets qui sont sur un même diamètre.

Dans le cas du genre 7, ce graphe se représente comme sur la Fig. 1.

Son groupe d'automorphismes G est engendré par une rotation σ d'ordre g , et un retournement τ : c'est le groupe dihédral D_g , d'ordre $2g$.

On épaissit alors les arêtes du graphe (ce qui revient à placer à chaque sommet un pantalon dont tous les bords sont identiques et à tous les recoller selon le même twist) pour obtenir une famille de surfaces de Riemann paramétrée par deux paramètres réels.

De manière équivalente, on peut déformer cette surface en effectuant simultanément un twist de même longueur l suivant l'ensemble Y des $(g - 1)$ géodésiques y et suivant l'ensemble Y' des deux géodésiques y' (les géodésiques y et y' sont représentées sur la Fig. 2). On considère donc la famille paramétrée par le couple de réels $(l, y) = (\text{twist}, \text{longueur})$.

Remarque 1. Dans tout ce qui suit, on s'autorise l'abus de langage suivant : une lettre minuscule (par exemple y) désigne aussi bien le nom d'une géodésique que sa demi-longueur ; pour une géodésique donnée (par ex. y), on note sa classe avec une majuscule (par ex. Y). Autrement dit, on note $\text{Longueur}(y) = 2y$, et $Y = \{y_i \mid 1 \leq i \leq g - 1\}$.

Remarque 2. En genre 5, les surfaces ainsi construites possèdent davantage de symétries. En effet, Le groupe d'automorphismes est alors le groupe $G_4(48)$ [12]. En fait, on retrouve une famille étudiée par P. Schmutz Schaller dans [15], dont j'avais donné une autre présentation dans ma thèse [8,9], et qui contient trois surfaces extrêmes : S_5 , $O(x \mid y)$, et $O(x \mid z)$.

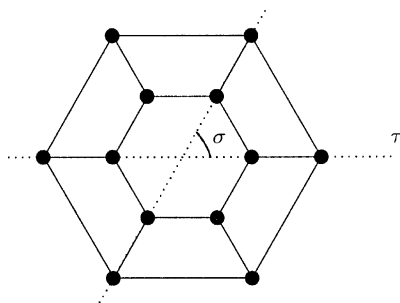


Fig. 1.

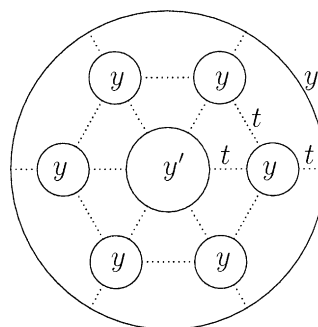


Fig. 2.

2.2. Esquisse du graphe

Remarquons tout d'abord que la longueur de y' se déduit directement de la longueur de y par la formule : $y' = \frac{g-1}{4}y$. Par ailleurs, on note t la longueur de la perpendiculaire commune entre deux géodésiques de $Y \cup Y'$, on a alors : $\cosh t = \frac{\cosh(y/2)}{\cosh(y/2)-1}$ (pour les formules de géométrie hyperbolique, on pourra se reporter à [6]).

On note X l'ensemble des $2g$ géodésiques qui coïncident avec la réunion de deux segments t lorsque le twist est nul (cf. Fig. 3). Une telle géodésique a pour demi-longueur : $\cosh \frac{x}{2} = \cosh \frac{t}{2} \cosh l$.

Soit $x \in X$, et soit $y \in Y$ intersectée par x , il existe une unique plus petite géodésique simple z telle que x, y, z soient contenues dans une sous-surface de signature $(1,1)$, et telle qu'en outre z intersecte x (resp. y) une seule fois (cf. Fig. 3). On note X' l'ensemble de ces géodésiques, et x' leur demi-longueur, qui vaut : $\cosh x' = \cosh t \cosh(y-l) \cosh l - \sinh(y-l) \sinh l$.

Pour chaque classe de géodésiques représentées ci-dessous, on donne l'expression de la demi-longueur en fonction des paramètres y et l , ainsi que le nombre de géodésiques contenues dans cette classe.

$$\cosh \frac{z}{4} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh \left(\frac{y}{2} - l \right),$$

$$\cosh \frac{n}{2} = \frac{-1 + \cosh t}{2} \cdot \cosh \frac{y}{2} + \frac{1 + \cosh t}{2} \cdot \left(\frac{y}{2} - l \right),$$

$$\cosh \frac{v}{2} = \frac{-1 + \cosh t}{2} \cdot \cosh \frac{y}{4} + \frac{1 + \cosh t}{2} \cdot \left(\frac{3y}{4} - 2l \right),$$

classe	Y	X	X'	N	V	Z
#	$g-1$	$3g-3$	$4g-4$	$2g-2$	$g-1$	$g-1$

Ensuite, on cherche à décomposer le demi-plan (l, y) en “cellules”, où chaque cellule est associée à une classe de géodésiques : si pour une valeur donnée de (l, y) on se trouve dans telle cellule, cela signifie que les géodésiques associées à cette cellule réalisent alors la systole. Les maxima de la systole se trouvent nécessairement parmi les sommets de cette décomposition du demi-plan. On remarque tout d'abord que l'on peut se restreindre au domaine d'étude $l/y \in [0, 1/2]$ en utilisant certaines symétries du graphe :

- Il est clair que deux surfaces obtenues à partir d'un twist opposé seront isométriques. Donc l'existence de la symétrie induite par $l \mapsto -l$ permet de se restreindre au cas $l > 0$.

- Par ailleurs, l'action d'un twist entier selon Y envoie la géodésique x sur une géodésique x_1 de longueur $2 \arg \cosh(\cosh(t/2) \cdot \cosh(y-l))$ tout en laissant y invariante. De manière plus générale, un twist de $k \in \mathbb{Z}$ tours selon Y envoie la géodésique x sur la géodésique x_k : $x_k(l) = x(l - ky)$. De même pour les géodésiques u, v , etc... Le twist entier selon Y agit donc comme une translation $(l/y, y) \mapsto (l/y - 1, y)$, et notre étude peut à présent se restreindre au domaine $0 \leq l/y \leq 1/2$.

Pour construire le graphe, on procède alors de la manière suivante. En partant de l'origine du demi-plan $(l/y, y)$, on remonte l'axe $l = 0$ jusqu'à ce qu'une autre géodésique (en l'occurrence x dans notre cas) égale y ; à ce moment on a rencontré une arête de la

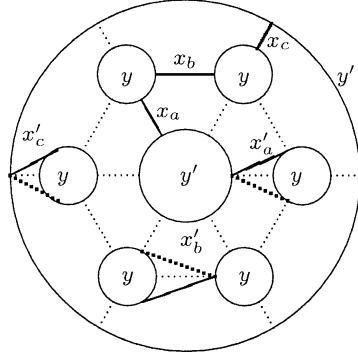


Fig. 3.

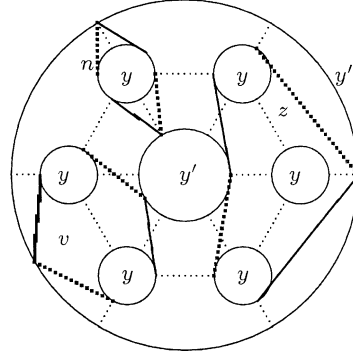


Fig. 4.

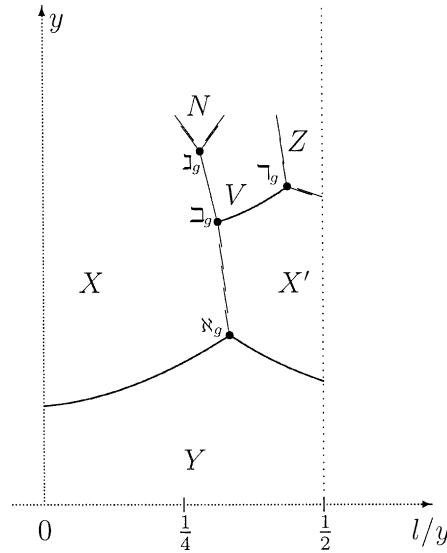


Fig. 5.

(pseudo-)décomposition cellulaire. On se déplace alors sur l'arête $y = x$ jusqu'à ce qu'une nouvelle géodésique (x' dans notre cas) devienne égale à $x = y$: on se trouve alors sur un sommet du graphe. Appelons \aleph_g cette surface. Ensuite, on longe l'arête $x = x'$ (resp. $x = y$) jusqu'au prochain sommet \beth_g . Et ainsi de suite.

Le graphe obtenu ainsi est représenté sur la Fig. 5.

Parmi les sommets de ce graphe, deux surfaces vont se révéler être parfaites : \aleph_g et \beth_g . Les deux autres sommets n'ont pas assez de systoles pour pouvoir être parfaites ($\#\{Syst\} = 6g - 6 < 6g - 5$); néanmoins ce sont des surfaces eutactiques : \beth_g est caractérisée (à isométrie près) par $x = v = n$ et possède $6g - 6$ systoles de demi-longueur $x = v = n \simeq 2,457283$; de même \beth_g est caractérisée (à isométrie près) par $x' = z = v$ et possède $6g - 6$ systoles de demi-longueur $x' = z = v \simeq 2,370907$.

3. Une suite infinie de surfaces parfaites et faiblement eutactiques

Montrons à présent le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit un entier naturel $g > 5$. Il existe une unique surface, notée \aleph_g , caractérisée, à isométrie près, par $y = x = x'$. Cette surface est parfaite et faiblement eutactique. Son ensemble de systoles est exactement $Y \cup X \cup X'$, et contient donc $8g - 8$ systoles.*

Preuve. • Montrons que $F = Y \cup X \cup X'$ est l'ensemble des systoles de \aleph_g . Après calculs, on obtient :

$$\begin{aligned} y = x = x' &\simeq 2,370907; & z &\simeq 3,228319, \\ n &\simeq 3,538722; & v &\simeq 3,029340. \end{aligned}$$

Soit a une systole de \aleph_g . Alors le nombre $N(a)$ d'intersections de a avec Y vaut au plus $2v/t \simeq 3,3$; donc $N(a)$ étant pair, $N(a) \leq 2$. Si $N(a) = 2$, les deux segments de a sont homotopes aux perpendiculaires de longueur t donc $a \in X \cup X'$. Si $N(a) = 0$, alors $a \in Y$. Donc F est bien l'ensemble des systoles de \aleph_g .

• Montrons à présent que \aleph_g est semi-eutactique et parfaite. Pour calculer le rang de l'espace engendré par les gradients des systoles, il est équivalent de calculer le rang de la matrice formée par le cosinus des angles d'intersections des systoles entre elles. En effet, la formule de Wolpert [18] appliquée à deux systoles notées σ et τ donne

$$\nabla l_\sigma(l_\tau) = \omega(l_\sigma, l_\tau) = \sum_{p \in \sigma \cap \tau} \cos \theta_p.$$

En écrivant la matrice intersection des systoles, on obtient une “matrice de Gram” symplectique, dont le rang égale précisément celui de l'espace engendré par les gradients des systoles.

Posons à présent :

- $a := \cos \alpha$, où α est l'angle aigu formé par les géodésiques x et y ;
- $b := \cos \beta$, où β est l'angle formé par les géodésiques x et x' en leurs points d'intersection qui n'appartiennent pas à y ;
- $c := \cos \gamma$, où γ est l'angle formé par deux géodésiques de la classe X' en un point d'intersection n'appartenant pas à y .

Après calculs, on trouve :

$$\begin{aligned} a = \cos \alpha &= \frac{\cosh t}{1 - \cosh t}, \\ b = \cos \beta &= \sin^2 \alpha \cosh(y/2) - \cos^2 \alpha, \\ c = \cos \gamma &= \sin \alpha \sin 2\alpha \cosh(y/2) - \cos \alpha \cos 2\alpha, \\ d = \cos 2\alpha &= 2a^2 - 1, \\ e = \cos(\pi - 3\alpha) &= 3a - 4a^3. \end{aligned}$$

Soit $C(\omega_1, \dots, \omega_{g-1})$ la matrice circulante définie par $C_{i,j} = \omega_{j-i+1}$ (indice modulo $g-1$). On détermine ensuite la matrice intersection des systoles entre elles (on range les systoles dans l'ordre suivant : $y, x'_b, x_b, x'_b, x_a, x'_a, x_c, x'_c$). On a alors $\Omega = (\Omega_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 8}$ où les $\Omega_{i,j}$ sont des blocs carrés d'ordre $g-1$ vérifiant $\Omega_{i,j} + {}^t\Omega_{j,i} = 0$.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{1,2} & \Omega_{1,3} & \Omega_{1,4} & \Omega_{1,5} & -\Omega_{1,5} & \Omega_{1,5} & -\Omega_{1,5} \\ -{}^t\Omega_{1,2} & \Omega_{2,2} & \Omega_{2,3} & 0 & \Omega_{2,5} & \Omega_{2,6} & \Omega_{2,5} & \Omega_{2,6} \\ -{}^t\Omega_{1,3} & -{}^t\Omega_{2,3} & 0 & -\Omega_{2,3} & 0 & \Omega_{3,6} & 0 & \Omega_{3,6} \\ -{}^t\Omega_{1,4} & 0 & {}^t\Omega_{2,3} & -\Omega_{2,2} & \Omega_{4,5} & \Omega_{4,6} & \Omega_{4,5} & \Omega_{4,6} \\ -\Omega_{1,5} & -{}^t\Omega_{2,5} & 0 & -\Omega_{4,5} & 0 & \Omega_{1,5} & 0 & \Omega_{5,8} \\ \Omega_{1,5} & \Omega_{2,6} & -{}^t\Omega_{3,6} & -{}^t\Omega_{4,6} & -\Omega_{1,5} & 0 & -\Omega_{5,8} & 0 \\ -\Omega_{1,5} & -{}^t\Omega_{2,5} & 0 & -\Omega_{4,5} & 0 & \Omega_{5,8} & 0 & \Omega_{1,5} \\ \Omega_{1,5} & -\Omega_{2,6} & -{}^t\Omega_{3,6} & -{}^t\Omega_{4,6} & -\Omega_{5,8} & 0 & -\Omega_{1,5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients des blocs carrés sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2} &= C(d, 0, \dots, 0, -a), & \Omega_{1,3} &= C(a, 0, \dots, 0, a), & \Omega_{1,4} &= C(-a, 0, \dots, 0, d), \\ \Omega_{1,5} &= C(a, 0, \dots, 0), & \Omega_{2,2} &= C(0, -e, 0, \dots, 0, e), & \Omega_{2,3} &= C(-a, d, 0, \dots, 0), \\ \Omega_{2,5} &= C(0, -b, 0, \dots, 0), & \Omega_{2,6} &= C(c, 0, \dots, 0), & \Omega_{3,6} &= C(b, b, 0, \dots, 0), \\ \Omega_{4,5} &= C(-b, 0, \dots, 0), & \Omega_{4,6} &= C(0, c, 0, \dots, 0), & \Omega_{5,8} &= C(-d, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

On montre maintenant que la surface \aleph_g est parfaite. Pour cela on reprend le raisonnement utilisé par P. Schmutz Schaller dans [14, Prop. 7.2] : on montre que $F = Y \cup X \cup X'$ est paramétrisante, ce qui entraînera la perfection de \aleph_g . On rappelle à ce propos qu'un ensemble fini $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de n géodésiques est dit paramétrisant si l'application suivante est un plongement :

$$h_F : \begin{cases} T_g \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \Sigma \mapsto (l_{a_1}(\Sigma), \dots, l_{a_n}(\Sigma)). \end{cases}$$

On montre ici que $F = Y \cup X \cup X'$ est paramétrisante. L'ensemble X réalise une partition de \aleph_g en $4(g-1)$ hexagones ; cette partition induit une partition de chaque géodésique de $Y \cup Y'$ en segments. Leurs longueurs et leurs angles orientés formés avec les géodésiques de X , sont entièrement déterminés par F (puisque toutes les faces sont triangulaires). Il s'ensuit que les hexagones de la partition de \aleph_g sont entièrement déterminés par F . F est donc paramétrisante ; en particulier h_F est une immersion en \aleph_g (cf. [16] et [17]), donc \aleph_g est parfaite.

Sachant que le rang des gradients est maximal, on peut conclure que \aleph_g est parfaite et faiblement eutactique par un argument d'eutaxie relative : en effet d'après [3, Prop. 1.5], l'eutaxie se lit sur le lieu invariant. Or, en affectant d'un même coefficient λ_i toutes les colonnes correspondantes aux géodésiques d'une même orbite ($i = 1..g-1$), on trouve une combinaison linéaire nulle (avec $\sum_{i=1}^{g-1} \lambda \neq 0$) en prenant

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{a-d+2b}{2a} > 0, \\ \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \lambda_8 = \frac{1}{2} > 0, \\ \lambda_3 = 1 > 0, \\ \lambda_5 = \lambda_7 = \frac{2ab+2ac-2bd+ad-a^2}{2a(2b+d-a)} < 0. \end{cases} \quad \square$$

4. Une suite infinie de surfaces parfaites et semi-eutactiques

Montrons à présent le résultat suivant :

Théorème 2. *Soit un entier naturel $g > 5$. Il existe une unique surface, notée \sqsupset_g , caractérisée, à isométrie près, par $x = x' = v$. Cette surface est parfaite et semi-eutactique. Son ensemble de systoles est exactement $X \cup X' \cup V$, et contient donc $8g - 8$ systoles.*

Preuve. • Montrons que $F = X \cup X' \cup V$ est l'ensemble des systoles de \sqsupset_g . Après calculs, on obtient :

$$x = x' = v \simeq 2,448452,$$

$$y = n = z \simeq 3,057142.$$

Soit a une systole de \sqsupset_g . Alors le nombre $N(a)$ d'intersections de a avec Y vaut au plus $2v/t \simeq 4,4$; donc $N(a) \leq 4$. Si $N(a) = 0$, alors $a \in Y$; comme $y > x$, y ne peut être systole. Si $N(a) = 2$, les deux segments de a sont homotopes aux perpendiculaires de longueur t donc $a \in X \cup X'$. Si $N(a) = 4$, alors on liste toutes les géodésiques possédant exactement quatre segments homotopes aux perpendiculaires de longueur t . On trouve alors que $a \in V$. Donc F est bien l'ensemble des systoles de \sqsupset_g .

• Montrons à présent que \sqsupset_g est semi-eutactique et parfaite. Pour cela, il faut déterminer le rang de la matrice formée par le cosinus des angles d'intersections des systoles entre elles. Posons à présent :

- $a := \cos \alpha$, où α est l'angle aigu formé par les géodésiques x et y ;
- $b := \cos \beta$, où β est l'angle aigu formé par les géodésiques x et x' lorsqu'elles se coupent sur y ;
- $c := \cos \gamma$, où γ est l'angle formé par les géodésiques x et x' en leurs points d'intersection qui n'appartiennent pas à y ;
- $d := \cos \delta$, où δ est l'angle formé par deux géodésiques de la classe X' en un point d'intersection n'appartenant pas à y ;
- $m := \cos(\pi - 2\alpha) = 1 - 2a^2$.

Après calculs, on trouve :

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}; \quad b = -m = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad c = d = -\frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, le calcul montre que deux géodésiques de la classe X' qui se coupent en un point d'intersection appartenant à y , se coupent selon un angle droit.

On détermine ensuite la matrice intersection des systoles entre elles (on range les systoles dans l'ordre suivant : $v, x'_b, x_b, x'_b, x_a, x'_a, x_c, x'_c$). On a alors

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{1,2} & \Omega_{1,3} & \Omega_{1,4} & \Omega_{1,5} & 0 & \Omega_{1,5} & 0 \\ -^t\Omega_{1,2} & 0 & \Omega_{2,3} & 0 & \Omega_{2,5} & \Omega_{2,6} & \Omega_{2,5} & \Omega_{2,6} \\ -^t\Omega_{1,3} & -^t\Omega_{2,3} & 0 & -\Omega_{2,3} & 0 & \Omega_{3,6} & 0 & \Omega_{3,6} \\ -^t\Omega_{1,4} & 0 & ^t\Omega_{2,3} & 0 & \Omega_{4,5} & \Omega_{4,6} & \Omega_{4,5} & \Omega_{4,6} \\ -^t\Omega_{1,5} & -^t\Omega_{2,5} & 0 & -\Omega_{4,5} & 0 & \Omega_{5,6} & 0 & \Omega_{5,8} \\ 0 & -\Omega_{2,6} & -^t\Omega_{3,6} & -^t\Omega_{4,6} & -\Omega_{5,6} & 0 & -\Omega_{5,8} & 0 \\ -^t\Omega_{1,5} & -^t\Omega_{2,5} & 0 & -\Omega_{4,5} & 0 & \Omega_{5,8} & 0 & \Omega_{5,6} \\ 0 & -\Omega_{2,6} & -^t\Omega_{3,6} & -^t\Omega_{4,6} & -\Omega_{5,8} & 0 & -\Omega_{5,6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients des blocs carrés sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2} &= C(g, -k, 0, \dots, 0), & \Omega_{2,2} &= C(-b, -m, 0, \dots, 0), & \Omega_{3,6} &= C(c, c, 0, \dots, 0), \\ \Omega_{1,3} &= C(0, -j, 0, \dots, 0, -j), & \Omega_{2,5} &= C(0, -c, 0, \dots, 0), & \Omega_{4,6} &= C(0, d, \dots, 0), \\ \Omega_{1,4} &= C(g, 0, \dots, 0, -k), & \Omega_{2,6} &= C(d, 0, \dots, 0), & \Omega_{5,8} &= C(m, 0, \dots, 0). \\ \Omega_{1,5} &= C(-f, -f, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que la surface Σ_g est parfaite.

Sachant que le rang des gradients est maximal, on peut conclure que Σ_g est parfaite et semi-eutactique, par le même argument d'eutaxie relative que précédemment : en effet, si on affecte d'un même coefficient λ_i toutes les colonnes correspondantes aux géodésiques d'une même orbite ($i = 1..g-1$), on trouve une combinaison linéaire nulle (avec $\sum_{i=1}^{g-1} \lambda_i \neq 0$) en prenant

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \\ \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0. \end{cases} \quad \square$$

Références

- [1] Ch. Bavard, Systole et invariant d'Hermite, J. Reine Angew. Math. 482 (1997) 93–120.
- [2] Ch. Bavard, La systole des surfaces hyperelliptiques, Prépub. E.N.S. Lyon 71 (1992).
- [3] Ch. Bavard, Familles hyperboliques de réseaux symplectiques, Math. Ann. 320 (2001) 799–833.
- [4] Ch. Bavard, Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues, Prépub. lab. Math. Pures de Bordeaux 129 (2001).
- [5] Ch. Bavard, Invariant d'Hermite isotrope et densité des réseaux orthogonaux lorentziens, Preprint.
- [6] P. Buser, Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces, in : Progress in Mathematics, vol. 106, Birkhäuser, 1992.
- [7] P. Buser, P. Sarnak, On the period matrix of a Riemann surface of large genus (with an Appendix by J.H. Conway and N.J.A. Sloane), Invent. Math. 117 (1994) 27–56.
- [8] A. Casamayou-Boucau, Surfaces de Riemann parfaites en petit genre Thèse, Université Bordeaux 1, juillet 2000.
- [9] A. Casamayou-Boucau, Surfaces de Riemann parfaites en genre 4 et 6, à paraître dans Comment. Math. Helvetici.
- [10] U. Hamenstädt, New examples of maximal surfaces, Prépublication, 2000.
- [11] F.W. Jenny, Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf einer Schar kompakter Riemannscher Flächen, Comment. Math. Helvetici 59 (1984) 193–203.
- [12] I. Kuribayashi, A. Kuribayashi, Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genera five, J. Algebra 134 (1990) 80–103.

- [13] D. Mumford, A remark on Mahler's compactness theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 28 (1) (1971) 289–294.
- [14] P. Schmutz Schaller, Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length, *Geom. Funct. Anal. GAFA* 3 (1993) 564–631.
- [15] P. Schmutz Schaller, Systoles on Riemann surfaces, *Manuscripta Math.* 85 (1994) 429–447.
- [16] P. Schmutz Schaller, Congruence subgroups and maximal Riemann surfaces, *J. Geom. Anal.* 4 (1994) 207–218.
- [17] P. Schmutz Schaller, Perfect non-extremal Riemann surfaces, *Can. Math. Bull.* 43 (1) (2000) 115–125.
- [18] S. Wolpert, On the symplectic geometry of deformations of a hyperbolic surface, *Ann. of Math.* 117 (1983) 207–234.